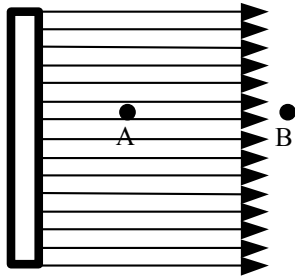


4. RAD SILA U ELEKTRIČNOM POLJU.

ELEKTRIČNI POTENCIJAL I ELEKTRIČNI NAPON

4.1 RAD SILA U ELEKTRIČNOM POLJU



Sl.11.

Ako se u električnom polju nađe neko naelektrisano telo, tada će to polje delovati na telo, usled čega se dato naelektrisano telo pomera. Pravac kretanja naelektrisanog tela odgovara pravcu polja, a smer je isti (pozitivno naelektrisano telo), ili je suprotan (negativno naelektrisano telo). Na ovaj način naelektrisano telo obavlja određeni rad (kreće se), što će reći da električno polje stvara određenu radnju ako se u njegovom prostoru nađe neko naelektrisanje. Dovođenjem nekog pozitivnog naelektrisanog tela u tačku A (sl.11), električno polje će nastojati da ga izbaci iz svog prostora, dakle pomera ga u tačku B (koja se nalazi u beskonačnosti – teorijski).

Ista radnja treba da se utroši da bi se dato naelektrisanje iz tačke B (van električnog polja) prenelo u tačku A. Naravno ova radnja je suprotnog smera i ona nastaje usled neke spoljnje sile. Zbir ovih radnji jednak je nuli. Na osnovu ovoga se može izvući jedan veoma bitan zaključak, koji ujedno predstavlja zakon održanja energije koji glasi: **Rad električnih sila pri prenošenju nekog naelektrisanja duž zatvorene putanje u električnom polju jednak je nuli.** Ovaj zakon važi bez obzira kakva je putanja, bitno je da je ona zatvorena (petlja, kontura ili pravac). Neko naelektrisanje miruje u električnom polju jedino u onom slučaju ako se sile koje na njega deluju potiru (sila električnog polja i spoljnja sila koja ga vraća).

Ako je električno polje homogeno na naelektrisanje deluje sila koja je jednaka: $F = Q \cdot E$.

Kod pomeranja naelektrisanja ono obavlja rad koji je jednak: $\Delta A = F \cdot \Delta r$, gde je :

ΔA utrošeni rad [J]

F..... sila koja deluje na naelektrisanje [N]

Δr pređeni put koje izvrši dato naelektrisanje [m].

4.2. ELEKTRIČNI POTENCIJAL

Ukupna radnja jednaka je zbiru svih pojedinačnih, pa sledi: $A = \sum \Delta A = \sum F \cdot \Delta r = \sum E \cdot Q \cdot \Delta r$ [J].

Ispitno (probno) naelektrisanje na svom putu dolazi u beskonačan broj tačaka. Svaka od njih poseduje određeni stepen potencijalne energije. To je ona energija koja bi se utrošila da bi se to naelektrisanje izbacilo iz te tačke van domašaja polja (energija polja), odnosno to je ona energija (rad) koja bi se utrošila da bi se isto to naelektrisanje izvan domašaja polja vratilo nazad u istu tačku (neka mehanička energija spolja). Ovaj odnos između potencijalne energije za neku tačku u električnom polju i količine naelektrisanja se naziva

ELEKTRIČNIM POTENCIJALOM.

Dakle, za bilo koju tačku u električnom polju električni potencijal je jednak:

$$V = \frac{W}{Q} = \frac{EQr}{Q} = E r \quad [V].$$

gde je V potencijal a njegova je jedinica volt [V].

Iz navedenog se može zaključiti da je električni potencijal **skalarna veličina**, što nam daje mogućnost da se preko njega može odrediti i električno polje (koje je vektorska veličina).

Relacija $V = E \cdot r$ može se koristiti kod homogenog električnog polja (beskonačne ravne). Kod svih drugih oblika električni potencijal se određuje relacijom :

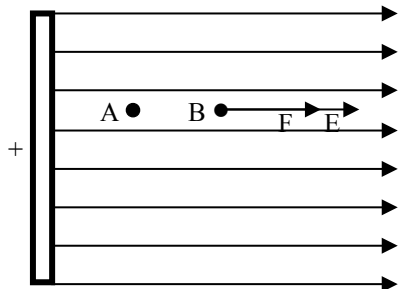
$$V = - \int E dr,$$

gde je $\int$ simbol za integral (viša matematika).

Ako u prostoru imamo više naelektrisanja, tada je ukupni potencijal bilo koje tačke jednak zbiru potencijala kojeg svako od tih naelektrisanja stvara u toj tački (vodeći računa o predznaku):

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

4.3. ELEKTRIČNI NAPON (RAZLIKA POTENCIJALA)



Sl.12.

Ako se u homogenom električnom polju nađe neko naelektrisanje Q (sl.12), na nje će delovati električno polje silom F . Kada se to naelektrisanje nađe u tački A, potencijalna energija te tačke biti će jednaka: $W_A = V_A \cdot Q$, a u tački B: $W_B = V_B \cdot Q$. Razlika između ove dve energije predstavlja rad koji se utroši da bi se to naelektrisanje prenelo iz tačke A u tačku B, tj.

$$A = W_A - W_B = V_A Q - V_B Q = (V_A - V_B) Q = U Q$$

Razlika električnih potencijala između bilo koje dve tačke naziva se **električnim naponom**.

Dakle, napon između tačaka A i B jednak je $U_{AB} = V_A - V_B$

Jedinica za električni napon je kao i za električni potencijal, tj. volt [V].

Iz navedenih relacija se može izvući, važan, zaključak da je električni rad srazmeran količini naelektrisanja i električnom naponu :

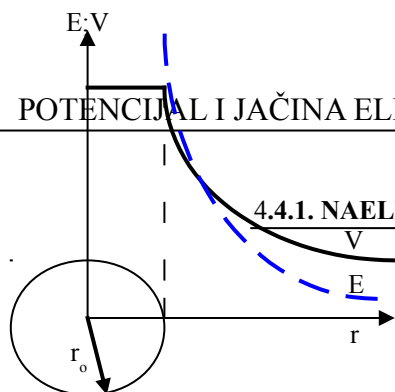
$$A = Q U \text{ [J]}$$

Kako je $A = F r = E Q r = U Q \Rightarrow U = E r$

Odnosno $E = \frac{U}{r}$, gde je r rastojanje između tačaka između kojih vlada napon.

Navedena relacija se koristi kod homogenog električnog polja, i iz nje je izvedena jedinica za jačinu električnog polja [V/m].

4.4. POTENCIJAL I JAČINA ELEKTRIČNOG POLJA KOD SLOŽENIJH SLUČAJEVA



Sl.13.

Kako u unutrašnjosti kugle nema naelektrisanja ($Q = 0 \Rightarrow D = Q / S = 0 \Rightarrow E = D / \epsilon = 0$), jer se sva naelektrisanja potiskuju ka površine, pa je i jačina električnog polja jednaka nuli.

Električno polje u prostoru van kugle ($r \geq r_0$) iznosi:

$$E = \frac{Q}{4r^2 \pi \epsilon} \left[\frac{V}{m} \right]; \quad D = \frac{Q}{4r^2 \pi}$$

Električni potencijal u unutrašnjosti kugle jednak je potencijalu na površini, jer je potencijal skalarna veličina, pa se on u centru kugle dobije ukupnim zbirom potencijala kojeg stvaraju elementarna naelektrisanja sa površine.

Dakle potencijal u kugli, kao i na njoj površini iznosi:

$$V = - \int E dr_0 = - \int \frac{Q}{4r_0^2 \pi \epsilon} dr_0 = \frac{Q}{4r_0 \pi \epsilon} = E \cdot r_0 \text{ [V]}$$

$$V = Er = [V]$$

25

El. potencijal u prostoru van kugle jednak je:

$$V = -\int E dr = -\int \frac{Q}{4r^2 \pi \epsilon} dr = \frac{Q}{4r \pi \epsilon} = E$$

Konačno za $r \geq r_0 \Rightarrow$

$$V = \frac{Q}{4r \pi \epsilon} [V].$$

Na sl.13 se vidi kako jačina električnog polja i električni potencijal zavise od udaljenosti posmatrane tačke od centra naelektrisane kugle

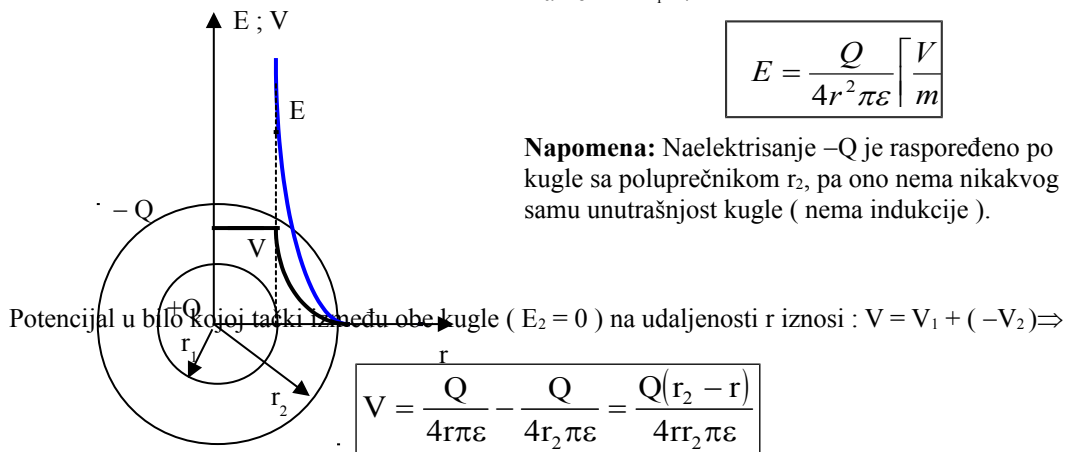
4.4.2. DVE KONCENTRIČNE KUGLE

Ako imamo dve koncentrične, slika 14, kugle koje su naelektrisane sa $+Q$ i $-Q$, tada je električno polje u manjoj kugli jednako nulu.. Isti je slučaj u prostoru van kugli, jer obe stvaraju istu jačinu polja, pa se ona međusobno potiru, jer su istog inteziteta. Električno polje između kugli ($r_2 \geq r \geq r_1$) jednako je polju unutrašnje kugle, jer je polje spoljašnje jednako nuli.

Dakle $E = E_1 \Rightarrow$

$$E = \frac{Q}{4r^2 \pi \epsilon} \left[\frac{V}{m} \right]$$

Napomena: Naelektrisanje $-Q$ je raspoređeno po površi kugle sa poluprečnikom r_2 , pa ono nema nikakvog dejstva na samu unutrašnjost kugle (nema indukcije).



Sl.14.

Iz navedenih relacija sledi da je potencijal na površini unutrašnje kugle jednak:

$$V' = \frac{Q}{4r_1\pi\epsilon} - \frac{Q}{4r_2\pi\epsilon} = \frac{Q(r_2 - r_1)}{4r_1r_2\pi\epsilon},$$

a potencijal na spoljašnjoj površini kugle jednak je:

$$V'' = \frac{Q}{4r_2\pi\epsilon} - \frac{Q}{4r_2\pi\epsilon} = 0$$

Napon između unutrašnje i spoljašnje površine jednak je potencijalu unutrašnje površine, jer je :

$$U = V' - V'' = V' - 0 = \frac{Q(r_2 - r_1)}{4r_1r_2\pi\epsilon}$$

Iz izraza za električni napon može se izraziti količina naelektrisanja Q, koja iznosi:

$$Q = \frac{U \cdot 4r_1r_2\pi\epsilon}{r_2 - r_1} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Jačina električnog polja između dve koncentrične kugle koje su priključene na napon U jednaka je:

$$E = \frac{Ur_1r_2}{r^2(r_2 - r_1)}$$

Grafički dijagram jačine električnog polja i električnog potencijala za dve koncentrične kugle u zavisnosti od udaljenosti r od centra kugli dat je na slici 14.

4.4.3. USAMLJENI PROVODNIK (NIT)

Jačina električnog polja kod pravolinijskog beskonačnog provodnika (vidi sliku 5) jednaka je:

$$E = \frac{Q}{2\epsilon r\pi l}$$

Koristeći višu matematiku potencijal provodnika jednak je: $V = -\int E dr \Rightarrow$

$$V = -\int \frac{Q}{2\epsilon r\pi l} dr = -\int \frac{Q}{2\epsilon\pi l} \frac{dr}{r} = -\frac{Q}{2\epsilon\pi l} \int \frac{dr}{r} = -\frac{Q}{2\epsilon\pi l} \ln r.$$

Konačno,

$$V = -\frac{Q \ln r}{2\epsilon\pi l}$$

gde je $\ln r$ prirodni logaritam od r , a r je udaljenost tačke od osne simetrale (centra)provodnika.

4.4.4 DVA PARALELNA PROVODNIKA

Jačina polja između dva paralelna provodnika jednaka je:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{Q_1}{2\epsilon\pi l r_1} \pm \frac{Q_2}{2\epsilon\pi l r_2}$$

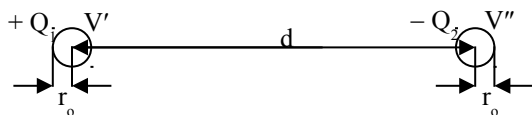
Električni potencijal u nekoj tački između dva provodnika jednak je: $V = V_1 + V_2$

Ako je $Q_1 > 0$, a $Q_2 < 0 \Rightarrow V = V_1 - V_2$, pa je:

$$V = -\int E_1 dr_1 - (-\int E_2 dr_2) = -Q_1 \ln r_1 / 2\epsilon\pi l - (-Q_2 \ln r_2 / 2\epsilon\pi l) = Q_2 \ln r_2 / 2\epsilon\pi l - Q_1 \ln r_1 / 2\epsilon\pi l$$

Ako su apsolutne vrednosti naelektrisanja jednake ($|Q_1| = |Q_2|$) $\Rightarrow$

$$V = \frac{Q}{2\epsilon\pi l} \ln \frac{r_2}{r_1}$$



Sl.15.

Električni napon između dva paralelna provodnika, sl.15, ($r_2' = d - r_0$; $r_1' = r_2'' = r_0$ i $r_1'' = d - r_0$)

iznosi:

$$U = V' - V'' = \frac{Q}{2\epsilon\pi l} \ln \frac{d - r_0}{r_0} - \frac{Q}{2\epsilon\pi l} \ln \frac{r_0}{d - r_0} \Rightarrow$$

$$U = \frac{Q}{2\epsilon\pi l} 2 \ln \frac{d - r_0}{r_0} = \frac{Q}{\epsilon\pi l} \ln \frac{d - r_0}{r_0}$$

4.4.5. CILINDRIČNI (KOAKSIJALNI) PROVODNIK

Jačina električnog polja između dva cilindra kod cilindričnog provodnika jednaka je jačini polja unutrašnjeg cilindra, ako su naelektrisanja raznoimena (najčešći slučaj). Dakle (za $|Q_1| = |Q_2|$; $r_1 < r < r_2$) $\Rightarrow$

$$E = E_1 = \frac{Q}{2\epsilon\pi r l}$$

Električni potencijal u prostoru između cilindra iznosi:

$$V = V_1 + (-V_2) = -Q \ln \frac{r}{2\epsilon\pi l} - \left(-Q \ln \frac{r_2}{2\epsilon\pi l} \right) \Rightarrow$$

$$V = \frac{Q}{2\epsilon\pi l} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Električni napon između cilindričnih provodnika iznosi ($r' = r_1$; $r'' = r_2$):

$$U = V' - V'' = \frac{Q}{2\epsilon\pi l} \ln \frac{r_2}{r_1} - \frac{Q}{2\epsilon\pi l} \ln \frac{r_2}{r_2} \Rightarrow$$

$$\boxed{U = \frac{Q}{2\epsilon\pi l} \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

4.4.6. PROVODNIK I RAVAN

Jačina električnog polja između provodnika i ravnine iznosi (na normali $r_1 = a$; $r_2 = 2h - a$; $Q_1 = -Q_2$):

$$E = \frac{Qh}{\epsilon\pi la(2h - a)}$$

Električni napon ($r_2' = 2h - r_0$; $r_1' = r_0$; $r_2'' = r_0$; $r_1'' = 2h - r_0$) :

$$U' = V' - V'' = \frac{Q}{2\epsilon\pi l} \ln \frac{2h - r_0}{r_0} - \frac{Q}{2\epsilon\pi l} \ln \frac{r_0}{2h - r_0} = \frac{Q}{\epsilon\pi l} \ln \frac{2h - r_0}{r_0} \Rightarrow U = \frac{U'}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{U = \frac{Q}{2\epsilon\pi l} \ln \frac{2h - r_0}{r_0}}$$

Z A D A C I :

4.1. Koliki je potencijal tačke koja je udaljena $r = 3 \text{ m}$ od tačkastog naelektrisanja $Q = 2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ u vazduhu ?

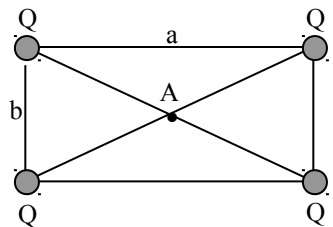
4.2. Dva tačkasta opterećenja $Q_1 = 50 \text{ nC}$ i $Q_2 = -20 \text{ nC}$ nalaze se u vazduhu na međusobnom rastojanju od 20 cm . Izračunati:

- potencijal tačke M koja se nalazi tačno na sredini spojnice opterećenja Q_1 i Q_2 ;
- rad potreban da se opterećenje Q_1 prebaci u tačku M.

4.3. Ako je potencijal tačke N, $V_N = 0$, a potencijal tačke M, $V_M = 1800 \text{ V}$, odrediti koliko je električno opterećenje Q, kada se za njegovo pomeranje iz tačke N do tačke M utroši rad od $4,5 \cdot 10^{-5} \text{ J}$.

4.4. U kom odnosu trebaju da budu opterećenja kugli Q_1 i Q_2 da bi površinska gustina naelektrisanja obe kugle bila jednaka, ako im je odnos poluprečnika $R_1/R_2 = 4$?

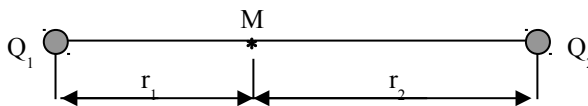
4.5.



U temenima pravougaonika u vazduhu nalaze se tačkasta opterećenja Q (sl.4.5). Stranice pravougaonika iznose $a = 8 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$. Potencijal tačke A koja se nalazi na preseku dijagonala jednak je $V_A = 1,2 \text{ kV}$. Koliko iznosi opterećenje Q ?

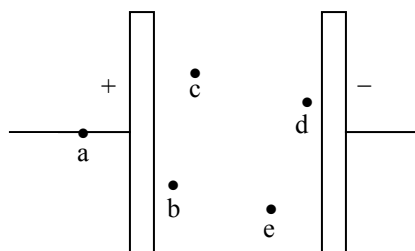
4.6. Dva tačkasta naelektrisanja $Q_1 = 4 \text{ nC}$ i $Q_2 = -3 \text{ nC}$ nalaze se u vazduhu na međusobnom rastojanju od 10 cm . Izračunati rad potreban da se naelektrisanje $Q = 1 \text{ nC}$ prenese iz tačke nultog potencijala u tačku koja se nalazi tačno na sredini spojnice (pravca) između opterećenja Q_1 i Q_2 .

4.7.



Dva tačkasta naelektrisanja $Q_1 = 5 \text{ nC}$ i $Q_2 = -10 \text{ nC}$ nalaze se na međusobnom rastojanju $r = 18 \text{ cm}$ (sl.4.7.). Odrediti položaj tačke M koja se nalazi na duži koja spaja naelektrisanja i ima nulti potencijal.

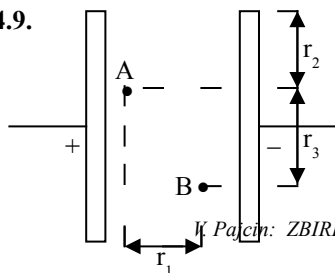
4.8.



Koja tačka, prema slici 4.8, ima najveći potencijal, ako se one nalaze u prostoru između dve paralelne ravne koje stvaraju homogeno električno polje (pločast kondenzator) ?

Sl.4.8.

4.9.



Napisati izraz za električni napon između tačaka A i B, preko jačine električnog polja i geometrijskih dimenzija, koje su prikazane na slici 4.9. Tačke se nalaze između dve paralelne ravne beskonačnih površina, na malom rastojanju.

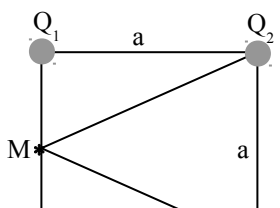
sl.4.9.

4.10. U predhodnom zadatku pronaći tačku C čiji je potencijal najmanji i tačku D čiji je potencijal jednak nuli. Rešenje prokomentarisati.

4.11. Za predhodni zadatak ustanoviti gde je potrebno utrošiti najveći rad a gde najmanji da bi se neko naelektrisanje prebacilo iz jedne tačke u drugu (tačke su A;B;C i D). Uz rešenja dati potrebna objašnjenja, uz potrebnu sliku (povezati zadatak 4.9. i 4.10.).

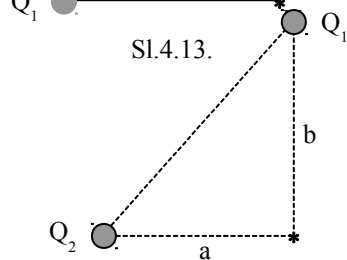
4.12. U polju usamljenog tačkastog naelektrisanja odabrane su dve tačke A i B na jednakim udaljenostima r od centra naelektrisanja Q. Koliki je napon između datih tačaka, ako ugao između linija sila (električnih linija), koje spajaju te tačke iznosi 60° , a dielektrik je vazduh? Dati kratak komentar.

4.13.



Koliki je napon između tačaka M i N, prema sl.4.13, ako su naelektrisanja $Q_1 = 10 \text{ nC}$, $Q_2 = 20 \text{ nC}$ i $Q_3 = 30 \text{ nC}$ smeštene u tri temena kvadrata stranice $a = 30 \text{ cm}$. Tačka N čini četvrto teme kvadrata, a tačka M se nalazi tačno na sredini stranice koja spaja temena u kojima se nalazi naelektrisanje Q_1 i Q_3 . Sredina je vazduh ($\epsilon_r = 1$).

4.14.



Sl.4.13.

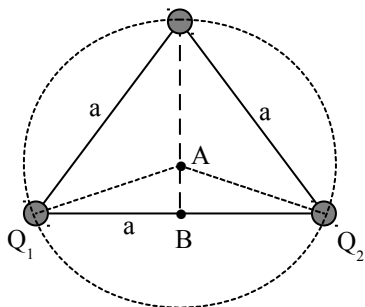
Dva tačkasta naelektrisanja $Q_1 = -50 \text{ nC}$ i $Q_2 = 20 \text{ nC}$, nalaze se u vazduhu u dva temena pravouglog trougla, kao na sl.4.14.

Ako je $a = 6 \text{ cm}$ i $b = 8 \text{ cm}$ odrediti potencijal tačke A koja se nalazi u slobodnom temenu trougla.

Sl.4.14

4.15. U temenima pravougaonika u vazduhu nalaze se četiri ista tačkasta naelektrisanja Q. Ako su stranice pravougaonika $a = 4 \text{ cm}$ i $b = 3 \text{ cm}$, odrediti kolika je količina navedenih naelektrisanja ako ona u centru pravougaonika (presek dijagonala) stvaraju električni potencijal od $2,2 \text{ KV}$.

4.16.



U temenima jednakostraničnog trougla u vazduhu nalaze se tri tačkasta naelektrisanja Q_1 , Q_2 i Q_3 , kao na sl.4.16.

Ako su stranice trougla $a = 10 \text{ cm}$, a $Q_2 = 2 \cdot 10^{-11} \text{ C}$ i $Q_3 = -4 \cdot 10^{-11} \text{ C}$, izračunati količinu naelektrisanja Q_1 tako da napon između tačaka A i B iznosi $-1,8 \text{ KV}$. Tačka A je centar opisane kružnice a tačka B je na polovini stranice koja spaja naelektrisanja Q_1 i Q_2 .